Leçon 234 : Espaces L^p, $p \in [1, +\infty]$

Développements :

Théorème de Grothendieck, Théorème de Fourier-Plancherel.

Bibliographie :

Faraut, Briane Pagès, Brézis, Bernis, OA, Hirsch-Lacombe, Candelpergher intégration

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon nécessite d'avoir compris les notions de presque partout (comme par exemple les opérations sur les ensembles négligeables) et évidemment la définition des espaces L^p . Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie L$L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p > q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution comme par exemple le produit de convolution de deux fonctions de L^1). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux à propos desquels des développements peuvent être proposés comme la description du dual. Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés. Pour aller plus loin, la complétude de L^p (p fini ou infini) offre aussi un bon développement. On peut aussi penser à certains résultats sur la dimension des sous-espaces fermés de L^p dont les éléments ont des propriétés particulières de régularité. Enfin, le cas particulier hilbertien $p = 2$ mérite attention mais il faut se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

Rapport du jury 2018 :

Cette leçon nécessite d'avoir compris les notions de presque partout (comme par exemple les opérations sur les ensembles négligeables) et évidemment la définition des espaces L^p. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geq q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution comme par exemple le produit de convolution de deux fonctions de L^1. Les espaces associés à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux qui peuvent être exploités dans cette leçon. Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés. Pour aller plus loin, la complétude de L^p fini ou infini) offre aussi un bon développement. On peut aussi penser à certains résultats sur le caractère fini dimensionnel des sous-espaces fermés de L^p dont les éléments ont des propriétés remarquables (par exemple être dans L^∞). Enfin, le cas particulier hilbertien $p = 2$ mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

Remarque 1. *Cadre : (X, A, μ) un espace mesuré, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note λ la mesure de Lebesgue.*

1 Définitions des espaces L^p et premiers résultats

1.1 Construction des espaces L^p

Définition 2 (Briane Pagès p153). *$\mathcal{L}^p$, norme p.*

Définition 3 (Brézis p56). *[Briane p176] $\mathcal{L}^\infty = \{f : X \to K, \exists M > 0 f \leq M \mu pp\}$. Norme ∞.*

Exemple 4 (Briane P p153). *Pour $X = \mathbb{N}$, $A = P(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage, $l^p(\mathbb{N}) := L^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_n$ telles que $\sum |x_n|^p > +\infty$ et $l^\infty(\mathbb{N}) := L^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites bornées.*

Proposition 5 (Briane p155). *Inégalité de Holder.*

Proposition 6 (Briane p156). *Cauchy-Schwarz.*

Proposition 7 (Briane p158). *Inégalité de Minkowski.*

Proposition 8 (Briane p161). *Les normes p sont des semi-normes.*

Remarque 9. *Pour $0 < p < 1$ on aurait une inégalité de la forme $||f+g||_p \leq A_p(||f||_p + ||g||_p)$ avec $A_p > 1$. Ainsi, l'application $||.||_p$ ne vérifierait pas l'inégalité triangulaire.*

Définition 10 (Briane p161). *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $N_p(X) := \{f \in L_p(X), ||f||_p = 0\}$. C'est un sev de $L^p(X)$ qui est l'ensemble des fonctions nulles presque partout.*

Définition 11 (Briane p161). *On définit $L^p(X) := L_p(X)/N_p(X)$.*

Proposition 12 (Briane p161). *Pour $f \in L_p(X)$, $||f||_p$ est bien définie, et est une norme.*

Remarque 13 (Briane p162). *En quotientant l'espace vectoriel par l'ensemble des fonctions de semi-norme nulle, on a obtenu un espace vectoriel normé. Pour les $l^(\mathbb{N})$, ce quotient est trivial car la seule fonction nulle presque partout est la fonction nulle.*

1.2 Complétude

Théorème 14 (Briane p162)**.** *[Brézis p58] Théorème de Riesz-Fischer. Complétude et pour toute suite $(f_n)_n$ de $L^p(X)$ on peut extraire une suite pour laquelle tout choix de représentants dans $\mathcal{L}^p$ converge presque partout.*

1.3 Théorèmes de convergence

Contre exemple 15 (Briane p164)**.** *Exemple d'une suite qui converge dans L^p mais pas μ-pp. Pour L^∞, $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, converge vers 1 en norme infinie et vers 0 pp.*

Remarque 16. *Le théorème de Riesz-Fischer donne cependant la convergence presque partout d'une suite extraite.*

Théorème 17 (Briane p165)**.** *Convergence dominée dans L^p.*

Contre exemple 18. *$f_n = n1_{[0,1/n]}$ converge pp vers 0 mais ne converge pas en norme p vers 0.*

1.4 Densité

Proposition 19 (Briane p166)**.** *Densité des fonctions étagées intégrables dans L^p.*
Densité des fonctions étagées dans L^∞.
Densité des fonctions continues à support compact dans L^p.

Remarque 20. *Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme L^p, il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.*

Application 21 (Briane p188)**.** *[Bernis] Inégalité de Hardy.*

Application 22 (Hirsch-Lacombe)**.** *L'opérateur de translation est continu dans tous les L^p.*

Application 23 (Briane)**.** *L^p est séparable. L^∞ n'est pas séparable.*

2 Relations entre les espaces L^p

2.1 Inclusions entre les L^p

Proposition 24 (Briane p154,p173)**.** *Si $p \leq q$, $L^q \subset L^p$ et $lim||f||_p = ||f||_\infty \in [0, +\infty]$.*

Contre exemple 25 (Briane p154)**.** *Contre exemple sur $\mathbb{R}$: pas d'inclusion entre L^1 et L^2.*

Proposition 26. *Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$ pour $1 \leq q \leq p$, alors $f \in L^r$ $\forall q \leq r \leq p$*

Proposition 27 (Briane p154)**.** *$0 < p \leq q$, $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$.*

Proposition 28. *Si la mesure est finie, pour tous $q \leq p$, on a $||.||_q \leq \mu(X)^{(p-q)/pq}||.||_p$. Donc une convergence dans L^p implique une convergence dans L^q.*

2.2 Dualité

Théorème 29 (Brézis p61)**.** *[Hirsch-Lacombe p138] Pour $1 < p < \infty$, il y a un isomorphisme isométrique entre le dual de L^p, $(L^p)'$ et L^q avec $1/p + 1/q = 1$.*

Proposition 30 (Brézis p63,65)**.** *Le dual de L^1 est isométrique à L^∞ mais le dual de L^∞ n'est pas isométrique à L^1 (il le contient seulement).*

3 Applications des espaces L^p

3.1 Convolution et régularisation

Définition 31 (Briane Pagès p275)**.** *La convolée pour des fonctions mesurables positives.*

Définition 32 (Briane Pagès p277)**.** *Produit de convolution sous réserve d'existence.*

Proposition 33. *Symétrie si ces quantités sont bien définies.*

Proposition 34 (Briane Pagès p ?)**.** *[Hirsh Lacombe p149] Soient p, q, r tels que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ alors, si f est dans L^p , g dans L^q alors le produit de convolution est défini presque partout et est dans L^r : $||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q$.*

Remarque 35 (Briane Pagès p279)**.** *Si f est L^1_{loc} et g bornée à support compact alors le produit de convolution existe en tout point x.*

Proposition 36 (Hirsh Lacombe p151)**.** *L^1 muni du produit de convolution est une algèbre commutative. Mais l'anneau n'est pas unitaire.*

Proposition 37 (OA p117)**.** *Régularisation avec gC^∞.*

Proposition 38 (Briane Pagès p288)**.** *Si $\phi \in C^n$ à support compact et f est L^1 alors le produit de convolution est C^n.*

Remarque 39. *La convolution régularise et approxime. Ceci permet de montrer des résultats de densité.*

Définition 40 (OA p119)**.** *Approximation de l'unité.*

Exemple 41 (OA p119)**.** *[Briane Pagès p284] Exemple de construction.*

Proposition 42 (OA p119)**.** *Théorème d'approximation.*

Proposition 43. *Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \to g$ dans L^1.*
Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L_p$ avec $p = q/(q-1)$.

Application 44 (OA p121)**.** *Densité des fonctions C_c^∞ dans L^p.*

Application 45. *Théorème de Féjer.*

3.2 Transformée de Fourier

Définition 46 (Candel p352). *[Gasquet Willem] Transformée de Fourier.*

Exemple 47 (Faraut p130). *Exemples de transformées.*

Proposition 48. *Les transformées de Fourier sont uniformément continues et bornées.*

Proposition 49 (Candel p352). *Théorème de Riemann Lebesgue.*

Application 50. *La transformée de Fourier n'est pas surjective : il suffit de prendre une fonction intégrable qui ne tend pas vers 0 (des triangles de plus en plus grand)*

Proposition 51 (Candel p352). $TF(f) \in C_0(\mathbb{R})$.

Proposition 52 (Candel p352). $TF : L^1 \to C_0(\mathbb{R})$ *est linéaire et continue et appelée transformation de Fourier.*

Contre exemple 53 (Candel p353). *TF(f) n'est pas nécessairement intégrable.*

Proposition 54 (Candel p353). *Si* $f \in L^1$ *et* $g \in L^1$ *alors* $\int (TF(f)g = \in fTF(g)$.

Les autres propriétés avec la dérivée.

Proposition 55 (Rudin p224). *Théorème d'inversion.*

Proposition 56 (Rudin p225). *Injectivité.*

Application 57. *Théorème de Plancherel.*

Définition 58 (Candel p365). *Espace de Schwartz*

Exemple 59. *Les fonctions* C^∞ *à support compact,* $exp(-x^2)$.

Proposition 60 (Candel p366). TF *va de* S *dans* S. *C'est un isomorphisme. (bijection bicontinue).*

Remarque 61. *Interet de l'espace de Schwartz : f à support compact, TF à support compact si et seulement si* $f = 0$.

Théorème 62 (Candel p366). $TF(f * g) = TF(f)TF(g)$.

Exemple 63. *Calcul de* $\int_0^\infty sin(x)^2/x^2 dx$.

3.3 Probabilités

Proposition 64. *La convergence* L^p *implique la convergence en probabilité.*

Contre exemple 65. *Le contre-exemple de la réciproque.*

Proposition 66. *L'uniforme intégrabilité fournit la réciproque.*

Proposition 67. *Donner la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.*

4 Le caractère hilbertien de L^2

Proposition 68 (Briane p177). L^2 *est un Hilbert pour le produit scalaire...*

Théorème 69 (Briane p178). *Théorème de Riesz. Plus facile à montrer que dans le cadre général.*

Proposition 70. *Théorème de projection sur un convexe fermé.*

Exemple 71. *Problème des moindres carrés.*

Remarque 72. *Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les* L^p.

Application 73. *Théorème de Grothendieck.*